TEORIA DELLA RESISTENZA DEI CORPI MOLLI DI DANIELE FRANCESCONI...

Daniele Francesconi



§. 138. Nous definissons le mouvement, quant à la partie posterieure du corps E F, parce que l'anterieure MN est continuellement changèe par la compression.

§. 139. Que dans un tems infiniment petit $d\ t$ ces deux corps se pressent davantage, et que la dernière base EF parvienne en *ef.* Alors la vîtesse du corps A sera düe à la hauteur $v + d\ v$, et comme $e\,G = z + dz$, $E\ e$ ou $F f$ sera $= - d\,z$, lequel élément de l'espace etant décrit par la vîtesse $\sqrt{v}$, dt sera $= \frac{-dz}{\sqrt{v}}$.

§. 140. Donc la compression de l'un et de l'autre corps vaudra à présent $f - z - dz$. Car si l'on ajoute l'espace auquel la surface anterieure MN du corps A est réduite vers EF à l'espace racourci que le corps B a reçu par la compression, la somme sera $= f - z$, et le petit tems $d\,t$ etant ecoulé par dessus, elle sera $= f - z - dz$.

§. 141. Comme les corps en se comprimant mutuellement agissent l'un sur l'autre, que P soit la force avec laquelle les corps dans cet etat s'appliquent l'un à l'autre, en sorte que le corps A qu'on présume avancer encore suivant la direction EG soit repoussé directement par la force P.

§. 142. Par conséquent en vertu des principes méchaniques $A dv$ sera $= - P. - dz = P\,dz$. Si donc la diminution fz de l'intervalle EG causée par la compression est posée $= x$, dx sera $= - dx$.

§. 143. Et comme la pression P dépend de la compression, P sera une certaine fonction de x même, que sera determinée tout à l'heure.

§. 144. C'est pourquoi si $\int P\,d\,x$ est pris de manière qu'il evanouïsse, en posant $x = 0$, $A\,v$ sera $= A\,a - \int P\,d\,x$. De plus comme $- dz$ est $= dx = dt\sqrt{v}$, la compression dure jusqu'à ce que $dt\sqrt{v}$, c'est à dire la vîtesse du corps A evanouïsse; d'où l'on pourra inferer la plus grande compression par l'equation $Aa = \int P dx$, et connoitre en même temps la plus grande force, avec laquelle les corps A et B se compriment mutuellement dans le choc.

§. 145. Pour determiner la pression P, appellons au secours un cas connu par l'experience. Posons donc que dans un corps dont la dureté soit $= L$, la force pressante V produise une impression, dont la profondeur soit $= k^3$, et k^3 sera comme $\frac{V}{L}$.

§. 146. Que la dureté du corps A soit $= M$ et celle du corps $B = N$, et l'amplitude de la base $MN = cc$, suivant laquelle l'impression se fasse dans l'un et dans l'autre corps.

§. 147. Puis donc que la force avec laquelle les deux corps se compriment reciproquement, est $= P$, que la surface anterieure MN du corps A soit entrée à la profondeur $= r$, et la surface du corps B à la profondeur $= s$: on aura $r + s = x = f - z$, et l'impression du corps A sera $= ccr$, celle du corps $B = ccs$.

§. 148. Or etant $\frac{V}{L} : \lambda^3 = \frac{P}{M} : ccr = \frac{P}{N} : ccs$, on trouve $r = \frac{LP\lambda^3}{MVcc}$ et $s = \frac{LP\lambda^3}{NVcc}$; d'où vient $\frac{LP\lambda^3}{Vcc}\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{N}\right) = x$ et $P = \frac{MNVccx}{(M+N)L\lambda^3}$, et ainsi par la compression donnée x on connoit la force P avec laquelle les deux corps se compriment mutuellement. $\int P\,dx$ sera donc $= \frac{MNVccxx}{2(M+N)L\lambda^3}$ et $Av = Aa - \frac{MNVccxx}{2(M+N)L\lambda^3}$.

§. 149. Et comme la compression croit jusqu'à ce que le corps A ait perdu tout mouvement, la force de compression sera la plus grande, quand $v = 0$, c'est à dire, quand $Aa = \frac{MNVccxx}{2(M+N)L\lambda^3}$ ou $x = \sqrt{\frac{2Aa(M+N)L\lambda^3}{MNVcc}}$.

§. 150. Or cette valeur substituée dans l'expression superieure à la force P donnera $P = \sqrt{\frac{2AaMNVcc}{(M+N)L\lambda^3}}$ ou $P = \sqrt{\frac{2V}{L\lambda^3} \cdot \frac{MNcc}{M+N}\,Aa}$.

§. 151. En conséquence la plus grande impression de chaque corps peut etre assiguée. Car la surface anterieure MN du corps A sera pressée en dedans jusqu'à la profondeur $r = \sqrt{\frac{2L\lambda^3}{V} \cdot \frac{N}{(M+N)Mcc} \cdot Aa}$, et le corps B souffrira une impression jusqu'à la profondeur $s = \sqrt{\frac{2L\lambda^3}{V} \cdot \frac{M}{(M+N)Ncc} \cdot Aa}$.

§. 152. Nous avons consideré jusqu'à présent l'autre Corps B comme immobile, parce que c'est principalement dans ce cas qu'on a coutume d'examiner et de mesurer la force de percussion. Cependant, par la même methode, on peut determiner les forces et les impressions qui ont lieu, si l'un et l'autre Corps est en mouvement; et quand nous l'aurons fait, nous aurons déduit des premiers principes toutes les régles, suivant lesquelles le mouvement des Corps est troublé dans la collision.

§. 153. Considerons donc deux corps A et B, dont les masses soient désignées par les mêmes lettres A et B, et la dureté par M et N.

§. 154. Que ces Corps soient mûs avant le choc suivant la même direction VZ, le corps A avec une vitesse düe à la hauteur a, et B avec une vîtesse düe à la hauteur b. Que le corps A se meuve avec plus de vîtesse que B, en sorte qu'il l'atteigne et qu'il se fasse un choc, qui commence lorsque le centre de gravité du corps A est au point A.

§. 155. Ensuite, le tems t etant ecoulè, que les deux corps soient dans l'etat, que représente la figure, et qu'en tirant du centre de gravité de chacun les lignes Aa, Bb, perpendiculaires sur la droite VZ, on appelle $Va = p$, $Vb = q$, en sorte que si l'intervalle AB est posé $= z$, z soit $= q - p$. De plus que la vîtesse du corps A soit düe à la hauteur v; et celle du corps B à la hauteur u, on aura $dt = \frac{dp}{\sqrt{v}} = \frac{dq}{\sqrt{u}}$.

§. 156. Qu'au commencement du choc la distance des centres de gravité soit $AB = f$, laquelle distance pendant la durée du choc sera moindre à cause des impressions faites dans les deux corps.

§. 157. Que ces corps se touchent reciproquement par le plan MN normal à la droite AB, en sorte que la moyenne direction des forces, avec lesquelles les deux corps agissent mutuellement l'un sur l'autre, passe par le centre de gravité A et B des deux corps. Car si cela n'arrivoit pas, outre le changement de vîtesse de l'un et de l'autre corps, l'un des deux ou tous les deux aquerroient un mouvement gyratoire, dont il ne convient pas de traiter ici.

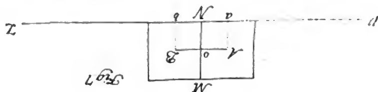
§. 158. Comme on a donc $f > z$, soit $x = f - z$, et x exprimera la somme des impressions, qui ont été faites sur l'un et l'autre corps.

§. 159. Et posant donc $t = 0$, on aura $p = 0$, $q = f$, $z = f$ et $x = 0$, auxquelles valeurs les integrations suivantes doivent etre accommodées.

§. 160. Posons à présent que la force avec laquelle les deux corps se compriment reciproquement soit $= P$, et comme par cette force le mouvement du corps A est retardé, et celui du corps B accéléré, cela nous fournira les deux équations suivantes

$$\text{I.}\ A\,dv = -P\,dp \quad \text{et} \quad \text{II.}\ B\,du = P\,dq.$$

§. 161. Mais parce que q est $= p + z = p + f - x$, on aura $dq = dp - dx$, et par conséquent l'autre equation se change en $B\,du = P\,dp - P\,dx$, d'où l'on déduit $A\,dv + B\,du = -P\,dx$, et en intégrant $Av + Bu = Aa + Bb - \int P\,dx$, puisque l'integrale $\int P\,dx$ se prend de manière qu'elle evanouït en posant $x = 0$.



§. 162. Ensuite à cause de $dp = dt\sqrt{v}$ et de $dq = dt\sqrt{u}$, on fera

$$\text{I. } \frac{A\,dv}{\sqrt{v}} = -P\,dt \text{ et II. } \frac{B\,du}{\sqrt{v}} = P dt$$

et par conséquent $\frac{A\,dv}{\sqrt{v}} + \frac{B\,du}{\sqrt{u}} = 0$, dont l'integrale est

$$A\sqrt{v} + B\sqrt{u} = A\sqrt{a} + B\sqrt{b}.$$

§. 163. Que si les corps sont denués de toute elasticité, le choc durera jusqu'à ce que la plus grande impression soit faite de part et d'autre, ou $dx = 0$. Dans ce cas donc dq sera $= dp$, et $\sqrt{v} = \sqrt{u}$, à quoi si l'on a égard dans la dernière équation, cela fera

$$\sqrt{v} = \sqrt{u} = \frac{A\sqrt{a} + B\sqrt{b}}{A+B}$$

qui est la régle connüe pour les corps non élastiques.

§. 164. Mais pour definir la pression P elle même, posons, comme ci dessus, qu'un corps dont la dureté est $= L$ reçoit de la force V une impression $= k^3$. Si donc le plan MN, par lequel les corps se touchent mutuellement est $= cc$, que le corps A reçoive une impression à la profondeur r, et le corps B à la profondeur s, l'impression du premier sera $= ccr$, et celle du second $= ccs$.

§. 165. De là résultera comme auparavant $\frac{V}{L} : k^3 = \frac{P}{M} : ccr = \frac{P}{N} : ccs$; et $r = \frac{LPk^3}{MVcc}$ et $s = \frac{LPk^3}{MVcc}$.

§. 166. Mais x est $= r + s$, et par conséquent $x = \frac{LPk^3\,(M+N)}{MNVcc}$, et la pression elle même $P = \frac{MNVccx}{L(M+N)k^3}$. C'est pourquoi on aura $\int P\,dx = \frac{MNVccxx}{2(M+N)Lk^3}$.

§. 167. Que si nous voulons à présent chercher la plus grande pression, qui a lieu, lorsque $\sqrt{v} = \sqrt{u} = \frac{A\sqrt{a} + B\sqrt{b}}{A+B}$, cela fera en substituant ces valeurs,

$$\frac{AB(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{A+B} = \int P\,dx = \frac{MNVccxx}{2(M+N)k^3}.$$

par où l'on trouve, $x = \sqrt{\frac{2Lk^3\,(M+N)AB(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{VMNcc(A+B)}}$.

§. 168. Par ce mòyen on connoit premiérement l'impression faite à chaque corps, qui sera $r = \frac{Nx}{M+N}$ et $s = \frac{Mx}{M+N}$.

§. 169. Et la pression la plus grande sera

$$P = \sqrt{\frac{2VMNccAB(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{Lk^3\ (M+N)(A+B)}}.$$

§. 170. Si donc le corps B etoit en repos avant le choc, la force de compression sera $P = \sqrt{\frac{2VMNcc.ABa}{Lk^3\ (M+N)(A+B)}}$; qui etant pour le corps B tout à fait immobile, $\sqrt{\frac{2VMNcc.Aa}{Lk^3\ (M+N)}}$, la compression dans le cas de la mobilité sera à la compression dans le cas de la immobilité comme $\sqrt{B}$ a $\sqrt{(A+B)}$.

§. 171. Je passe sous silence plusieures autres proprietés considerables, qu'on peut encore déduire aisément de ces formules.

OSSERVAZIONI

§. 172. Poichè le quantità L, V, k^3 sono comuni a tutti i casi del paragone, ed il percussore si fa essere un corpo duro, $M = \infty$: resterà nel §. 151 $Ns = \sqrt{Aa}$, così pure nel §. 168, sostituito il valor di x del §. 167: cioè *l'impressione in rapporto della semplice velocità, e della radice quadrata della massa percuziente;* secondo Eulero.

§. 173. Questa proposizione fu pronunziata nello stesso tempo anche a Napoli da *Pietro de Martino* per altre prove di raziocinio e di sperienza, contro le quali fu scritto variamente da varj: ma stante la nuova sperienza riferita a' §§. 34 e 126, deve trovarsi qualche errore in tutti. Ora lo cercheremo nel testo surriferito.

§. 174. Due essendo i calcoli, il primo dell'immobilità assoluta §§. 134 a 151 non potrebbe mai esser convincente, mentre non si pone alcuna massa al di là del corpo B, e nemmeno non si calcola la massa del corpo medesimo appoggiato, ma la sola sua elasticità circoscritta dal volume: il che soggiace in genere alle riflessioni fatte nel §. 32.

§. 175. In vero il risultato della forza P §. 150, coincide con quello trovato nella seconda dimostrazione §. 170, nella quale si ha B come massa, se facciasi $B = \infty$; di che non si accorse lo stesso Eulero. Ma

simile coincidenza non si verifica nel valore della profondità s, dove ritengasi la espressione M della rigidezza finita del percussore: giacchè dal primo calcolo §. 151, si ha $Ns = \frac{M}{M+N} . \sqrt{Aa}$; e dal secondo §. 172, $Ns = \sqrt{Aa}$. Quest' ultima espressione, per la disparizione di M, è di quell' assurdità, che si è notata sopra *Juan* al §. 58; e che non compariva nell' antico testo di Eulero dell' Accademia di Pietroburgo.

§. 176. Ma stiamo al solo caso della $M = \infty$. Avendosi dal testo antico $s = \sqrt{Aa}$, e dal moderno, ossia dell' Accademia di Berlino, $s = \sqrt{Aa} . \frac{M}{M+N}$ ci conviene investigare donde proceda la differenza ne' risultati, mentre le cose fondamentali sono le stesse affatto nell' uno e nell' altro testo, che abbiamo riferito, cioè ne' §§. 74 a 85, e 160 a 163. Certamente l' essere ommessa nel secondo testo la verbale dichiarazione della figura degli elastri e della concentrazione della massa, non importa nulla, fuorchè per la nitidezza o facilità, come dissi al §. 27.

§. 177. Dunque si noti, che il grande Autore, postosi bene a rilevare le altrui logomachie delle Forze Vive, si diede pur egli a metafisicare in altro modo sulla nozione della potenza P. Egli nel primo testo avevala con tutti i Fisici, materialmente ossia utilmente, riportata al peso o serie de' pesi, nelle ricerche dell'elasticità o dell'aria o delle lamine metalliche o delle corde, compresse o stirate: *Scilicet* P *mihi est pondus, cujus nisui deorsum aequalis est vis elastri expansiva*; ossia la tenacità o durezza o rigidezza. Quindi avendosi due rigidezze, una M, o P', nello spazio r, l'altra N, o P'', nello spazio s, si può, volendo, prendere una media P in tutto lo spazio $r+s$, ed in tal modo è sempre P un peso o serie di pesi; e lo stesso dicasi di L nel §. 145; che servirebbe per una tavola delle tenacità o clasticità specifiche, con prendere per termine di comparazione un dato corpo, di cui la resistenza si direbbe $L = 1$, oppur 1000. Ma Eulero in questo secondo scritto introdusse come un altro Ente, la forza V, §. 145: così pure alla stessa P diede il nome di Forza, con quelle strane nozioni, che nei §§. 71, 90, ho mal creduto esser proprie di *Juan*; il quale però stampando nel 1772 potea lasciarle ad Eulero, in cui sono cose sempre condonabili all' epoca 1745, quando bolliva la questione delle forze vive, del pari, se lice dirlo, famosa e fumosa. Ecco dunque il ritrovato di Eulero: *La force de percussion sera en raison composée de la*

raison simple de la vitesse et de la raison sousdoublée de la masse du corps qui heurte. Donc dans ce cas ni la proportion de Leibnitz, ni celle de Descartes n'ont point lieu. Mais cette force de percussion dépend principalement alors de la dureté de chaque corps M *et* N, *en sorte que plus le corps sont durs, et plus la force de percussion est grande.* Ripeterò francamente le riflessioni fatte al §. 71, ed aggiungerò che nel §. 170 è un' altra singolarità quella di concepire che la forza sia diversa in un percussore della stessa massa, della stessa velocità e della stessa rigidezza, secondo che il corpo percosso, già quieto, è irremovibile o movibile. Nè vi si distinguono gradazioni di massa nel movibile. Ma tutto ciò essendo superfluo, e di solo imbarazzo nella ricerca del rapporto delle impressioni, a queste sole ci terremo applicati, ossia al calcolo degli spazj.

§. 178. Noterò pertanto che nei §§. 139 e 155 è falso che la velocità variabile $\sqrt{v+dv}$ sia propria dell' estremità EF la quale percorre lo spazietto E*e*; quella è la velocità variabile del centro di gravità del corpo A; e la detta estremità E*e* ha una velocità maggiore in quel modo, che divisai ne' due articoli I e II. Tutti egualmente i calcoli sì di *Eulero* che di *Juan* e *Prony* abbisognano che la massa di ciascun corpo si supponga concentrata tutta in un solo punto: calcoli veri relativamente, supposizione innamissibile.

§. 179. La vignetta del frontispizio estratta dalla maggior tavola delle Figure farà che invano da taluno si volesse dissimulare la novità della pianta: come la differenza del risultato espressa nel §. 3. co' suoi corollarj sparsi per tutto lo scritto, farà che si deva riconoscere l' importanza di questa nuova questione ad uso della pratica. Ma però sempre chi ci vede la questione delle Forze Vive, viva felice.

FINE